

# 高次せん断変形理論による扇形平板の解析

構造工学分野 古川 義朗

## 1. はじめに

平板は通常薄板理論に基づいて解析が行われているが、この理論では平面保持の仮定から誘導されており、せん断変形の影響が取り込まれていない。板厚比  $h/a$  ( $h$ :板厚,  $a$ :代表スパン長) が  $10^{-1}$  程度の平板には適用可能であるが、それ以上になるとせん断変形の影響から実際の挙動とにずれが生じてくる。高次せん断変形理論は、面内・面外変位を板厚方向座標  $z$  の高次べきによって仮定するものであるが、仮定の度合いに応じて支配偏微分方程式の階数が1次理論と同じ6階かそれ以上の高階となることから、理論構成が精緻になるほど対象平板を解析的に取り扱うことが困難である。また、円板や扇形板といった実用性の高い形状を有する平板は支配方程式が高階であり、Bessel の微分方程式を含む複雑な計算が必要となるため様々な平板の解析解を得ることが困難である。しかしながら、有限要素解析ではせん断変形を考慮した各種の平板要素が使用されており、そのベンチマークとなるべき多様な境界条件に対する厳密解の整備が望まれるところである。

そこで、本研究では高次せん断変形理論の中でも  $z$  の3次項までを考慮した Reddy の3次せん断変形理論について取り扱い、極座標系での基礎式を誘導し、解析例の少ない扇形板を対象として、薄板理論および Mindlin 理論、Reddy 理論を用いて解析を行い、最大たわみ、曲げモーメントに及ぼすせん断変形の影響を境界条件、板厚比の変化に対して検討する。また、それぞれの境界条件の相違に基づく境界近傍のせん断力、ねじりモーメント分布の違いを検討する。

## 2. つり合い式と境界条件式の誘導

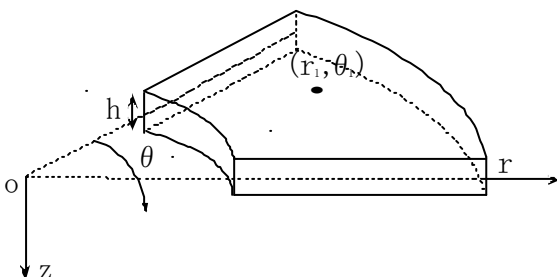


図-1 座標系

図-1に示すように座標系をとることとし、 $r, q, z$  方向の変位場をそれぞれ  $u, v, w$  とすると次の様に示す事が出来る。

$$u(r, q, z) = z \left[ y_r - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left( y_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right]$$

$$v(r, q, z) = z \left[ y_q - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left( y_q + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial q} \right) \right]$$

$$w(r, q, z) = w(r, q) \quad (1)$$

ここで、 $y_q(r, q), y_r(r, q)$  はそれぞれ  $r, q$  軸まわりの回転角であり、 $h$  は板厚である。この変位仮定に基づく、面外せん断ひずみは板の上下面において零となる2次放物分布であることが容易に確かめられ、したがって1次せん断変形理論で導入されているせん断修正係数は不要である。また、断面力  $M_i, P_i, Q_i, R_i$  は応力成分  $s_r, s_q, s_z, t_{rq}, t_{rz}, t_{r\theta}$  をそれぞれ  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$  として表すと次のように定義される。

$$(M_i, P_i) = \int_{-h/2}^{h/2} s_i(z, z^3) dz \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

$$(Q_2, R_2) = \int_{-h/2}^{h/2} s_4(1, z^2) dz$$

$$(Q_1, R_1) = \int_{-h/2}^{h/2} s_5(1, z^2) dz \quad (2)$$

これによれば、 $M_i, Q_i$  は、それぞれ通常の場合の合モーメントおよび合せん断力であり、 $P_i, R_i$  は高次理論に特有な物理的に意味を持たない高次断面力である。

つり合い式と境界条件は仮想仕事の原理を用いると外荷重を  $q(r, q)$  と表せば、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1^*}{\partial r} + \frac{Q_1^*}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_2^*}{\partial q} + q &= 0 \\ \frac{\partial M_1}{\partial r} + \frac{M_1 - M_2}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_6}{\partial q} - Q_1^* &= 0 \\ \frac{\partial M_6}{\partial r} + \frac{2M_6}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_2}{\partial q} - Q_2^* &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

この式(3)において、 $Q_i^*, M_i^*$  は、それぞれ有効せん断応力、有効曲げモーメントと呼ぶ事とし、次のように定義される。

$$\begin{aligned}
Q_1^* &= Q_1 - \frac{4}{h^2} R_1 + \frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{P_1 - P_2}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_6}{\partial q} \right) \\
Q_2^* &= Q_2 - \frac{4}{h^2} R_2 + \frac{4}{3h^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial P_2}{\partial q} + \frac{\partial P_6}{\partial r} + \frac{2P_6}{r} \right) \\
M_i^* &= M_i - \frac{4}{3h^2} P_i \quad (i=1,2,\dots,6)
\end{aligned} \tag{4}$$

境界条件は以下の4種を考えた.

(a) 単純支持 (ハードタイプ) : S1

$$\begin{aligned}
w = y_r = M_1^* = P_1^* = 0 \quad (r=a) \\
P_i^* = \frac{4}{3h^2} P_i \quad (i=1,2,\dots,6)
\end{aligned} \tag{5}$$

(b) 単純支持 (ソフトタイプ) : S2

$$w = M_1^* = M_6^* = P_1^* = 0 \quad (r=r_1, r_2) \tag{6}$$

(b) 固定支持 : C

$$w = \frac{\partial w}{\partial r} = y_r = y_q = 0 \quad (r=r_1, r_2) \tag{7}$$

(c) 自由支持 : F

$$\begin{aligned}
V_1^* = M_1^* = M_6^* = P_1^* = 0 \quad (r=r_1, r_2) \\
V_1^* = Q_1^* + \frac{4}{3h^2} \frac{1}{r} \frac{\partial P_6}{\partial q}
\end{aligned} \tag{8}$$

### 3. 変位関数の決定

断面力によるつりあい式(3-a)に式(4)の値を代入すると変位量  $w, y_r, y_q$  に関する連立偏微分方程式が得られるが, この微分方程式は, 直角座標による場合を参考にし[1]変位関数  $f, y$  を導入すると, 式(9)に変換される.

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \nabla^2 \left[ \nabla^2 - \frac{420(1-n)}{h^2} \right] f = \frac{q}{D} \\
\left[ \nabla^2 - \frac{168}{17h^2} \right] y = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

この時, 変位量  $w, y_r, y_q$  は式(10)で与えられる.

$$\begin{aligned}
w &= 85 \left[ \nabla^2 - \frac{84(1-n)}{17h^2} \right] f \\
y_r &= 20 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \nabla^2 + \frac{21(1-n)}{h^2} \right] f + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial q} \\
y_q &= 20 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} \left[ \nabla^2 + \frac{21(1-n)}{h^2} \right] f - \frac{\partial y}{\partial r}
\end{aligned} \tag{10}$$

ここで,  $\nabla^2$  はラプラスの演算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \tag{11}$$

で与えられ,  $D$  は板の曲げ剛性である

$$D = Eh^3 / 12(1-n^2) \tag{12}$$

ここで  $E, n$  はそれぞれ縦弾性係数, ポアソン比である.

### 4. 扇形板の解析

ここでは, 図-2に示すように  $q=0, a$  の二直線辺が単純支持され, 残りの2辺が任意の支持である集中荷重  $P$  を受ける等方性扇形板を対象とした. なお, 集中荷重の場合

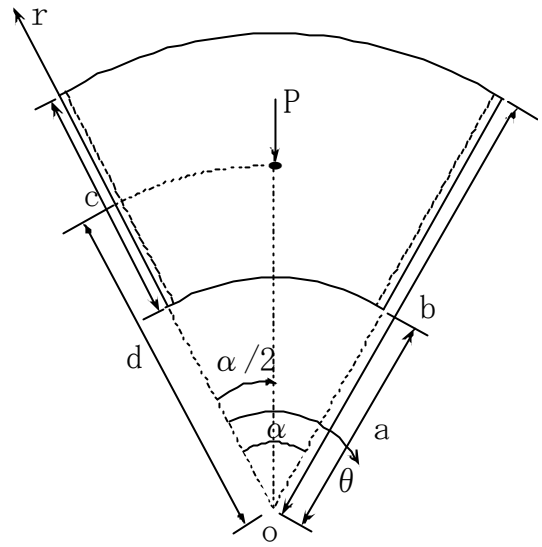


図-2 解析モデル

合半径方向および回転方向の荷重のフーリエ級数は以下のように表される.

$$\begin{aligned}
q(r, q) &= \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin Mq \\
q_m &= \frac{2P}{da} \sin \frac{mp}{2}
\end{aligned} \tag{13}$$

ここで  $M$  は次の様に表される.

$$M = \frac{mp}{a} \quad (m=1,2,3,\dots) \tag{14}$$

また扇形板は  $q=0, a$  において単純支持されていることから, 変位関数  $f, y$  は次のフーリエ級数で表される.

$$\begin{aligned}
y(x, q) &= \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m(x) \cos Mq \\
f(x, q) &= \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x) \sin Mq
\end{aligned} \tag{15}$$

これらを(9)式に代入して一般解を算出する. 尚, 後の解析の便を考慮して領域 I, II とに分けて以下の無次元化座標を導入する.

$$\text{領域 I : } x = \frac{r}{d}$$

$$\text{領域 II : } h = \frac{r}{b} \tag{16}$$

#### 4.1. 同次解

最初に, (15-b)式で示された変位関数を(9-a)式に代入し, 同次解を  $\Phi_m^{h1}, \Phi_m^{h2}$  の二つに分けて記述する. 尚, 以下では領域 I のものを例に述べる.

$$\nabla^2 \nabla^2 f = 0$$

$$\left[ \nabla^2 - \frac{420(1-n)}{h^2} \right] f = 0 \tag{17}$$

(17-a)式において

$$\Phi_m^{h1} = x^l \tag{18}$$

と置き,  $l$  の特性方程式を解くと

$$\Phi_m^{h1} = A_m x^M + B_n x^{-M} + C_m x^{M+2} + D_m x^{-M+2} \quad (M \neq 1)$$

$$\Phi_m^{h1} = A_m \mathbf{x} + B_m \mathbf{x}^{-1} + C_m \mathbf{x}^3 + D_m \mathbf{x} \log \mathbf{x} \quad (M=1) \quad (19)$$

となり, (17-b)式は変形された Bessel の微分方程式であり,

$$\Phi_m^{h2} = E_m I_M(\mathbf{bx}) + F_m K_M(\mathbf{bx})$$

$$b = \sqrt{\frac{420(1-\nu)}{h^2}} \quad (20)$$

また, (15-a)式を(9-b)式に代入すると

$$\left[ \nabla^2 - \frac{168}{17h^2} \right] \Psi = 0 \quad (21)$$

したがってこの解  $\Psi_m$  は

$$\Psi_m(\mathbf{x}) = G_m I_M(\mathbf{gx}) + H_m K_M(\mathbf{gx})$$

$$g = \sqrt{\frac{168}{17h^2}} \quad (22)$$

以上, 同次解をまとめて整理すると

$$\Phi_m^h = A_m \mathbf{x}^M + B_m \mathbf{x}^{-M} + C_m \mathbf{x}^{M+2} + D_m \mathbf{x}^{-M+2} + E_m I_M(\mathbf{bx}) + F_m K_M(\mathbf{bx}) \quad M \neq 1$$

$$\Phi_m^h = A_m \mathbf{x} + B_m \mathbf{x}^{-1} + C_m \mathbf{x}^3 + D_m \mathbf{x} \log \mathbf{x} + E_m I_1(\mathbf{bx}) + F_m K_1(\mathbf{bx}) \quad M=1 \quad (23)$$

$$\Psi_m(\mathbf{x}) = G_m I_M(\mathbf{gx}) + H_m K_M(\mathbf{gx}) \quad (24)$$

ここで  $A_m \sim H_m$  は積分定数であり,  $I_M, K_M$  はそれぞれ次数  $M$  の第一種, 第二種の変形されたベッセル関数である. 式(10)に代入すると変位の具体式が求められる. さらに, 式(1)より求められたひずみから, 応力-ひずみ関係を導入し, 式(2)に代入して断面力の具体式を求める. 領域 II についても同様の手順で求められ, 境界条件, 連続条件より得た 16 元の連立方程式を解く事で未定係数が決定され, たわみ, 断面力が求められる.

## 4.2 数値計算例

解析対象は図-2に示したように内径  $a$ , 外径  $b$ , スパン長  $c$ , 開角  $\alpha$  で中心より  $d$  の点に集中荷重を受ける扇形板とし, 数値計算例として,  $a = 0.5b, d = 0.75b, \alpha = 30^\circ$  を用いた. 表-1には円弧辺の境界条件が, 単純支持(ハードタイプ), 固定における着目点でのたわみ, 断面力および応力について Reddy 理論の数値結果を示す. なお, 比較のため薄板理論ならびに Mindlin 理論を用いた解析解と合わせて記した. 級数に関しては, モーメントは荷重載荷点では収束しないため, 変位がいずれの条件でも

収束した  $m=200$  とした. また, 着目点は荷重載荷点では発散する傾向を示すため表に示すように変位, モーメントに関しては  $r=0.745, q=15^\circ$  とし, せん断力は  $r=1, q=15^\circ$  とした. これによれば, 断面力に関しては各理論による違いは小さく, Reddy 理論による結果は板厚比が大きくなると少し変化を示したが, 他の理論による結果は概ね等しかった. しかし, たわみについては, せん断変形を考慮した Mindlin, Reddy 理論によるものがいずれの境界条件においても大きな値をとることが分かった.

そこで, 板厚比がたわみに及ぼす影響が大きいことから, 図-3では Mindlin, Reddy 理論における板厚の変化に伴う最大たわみの変化図を示した. ここで,  $W_K, W_M, W_R$  は, 薄板, Mindlin, Reddy 理論より求めたたわみを示し, 先ほどと同様に最大たわみは  $r=0.745$   $b$  での値を用いた.

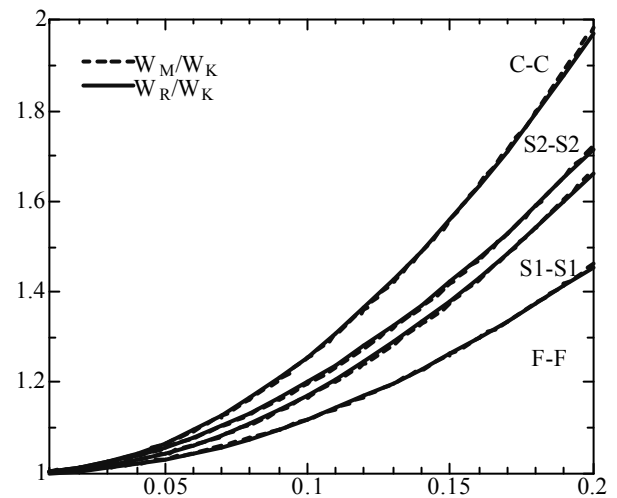


図-3 たわみ比較

図-3より明らかなように板厚比が 0.05 付近までは各理論とも薄板理論とほとんど変わらない結果が得られたが, 0.05 以上になるとたわみの急激な増加が見られた. 特に円弧辺が固定のものはその度合いが著しく表れており, せん断変形の影響が大きいことが分かる. また, 単純支持のものに関しても, ソフトタイプとハードタイプに少しの違いが見られ, 自由辺が最も影響が少なかった.

表-1 各理論による数値比較

着目点	$h/c$	$w$	$M_r$	$M$	$Q_r$	$Q_r^*$
Reddy	0.05	0.00896	0.359	0.446	-0.325	-0.324
	0.1	0.00998	0.363	0.457	-0.327	-0.326
	0.15	0.01177	0.367	0.467	-0.328	-0.328
	0.2	0.01418	0.372	0.476	-0.329	-0.329
S1-S1	0.05	0.00895	0.358	0.436	-0.324	
	0.1	0.00996	0.358	0.436	-0.325	
	0.15	0.01174	0.358	0.436	-0.327	
	0.2	0.01423	0.358	0.436	-0.328	
Thin Plate		0.00864	0.358	0.436	-0.323	

$w: Pc^2/D \quad M_r, M : P \quad Q_r, Q_r^* : P/c$

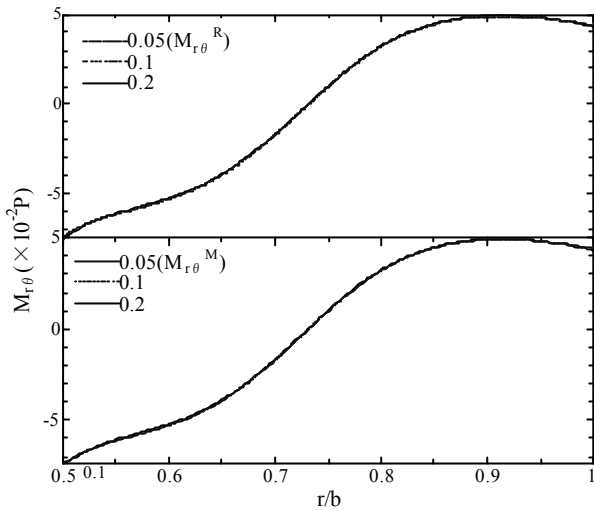


図-4  $q=0$  边上での  $M_{r\theta}$  分布 (S1 条件)

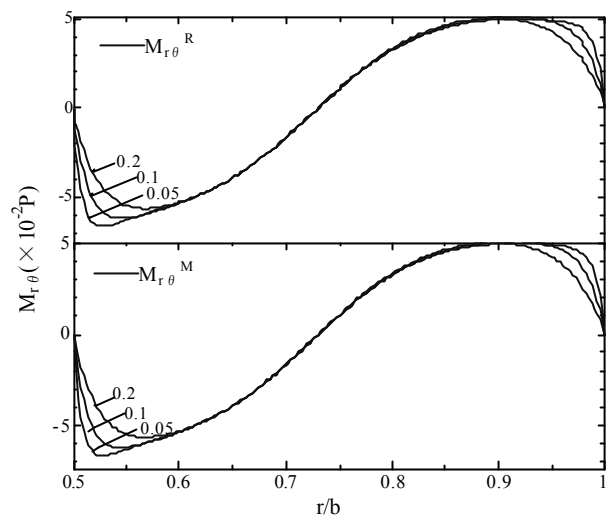


図-5  $q=0$  边上での  $M_{r\theta}$  分布 (S2 条件)

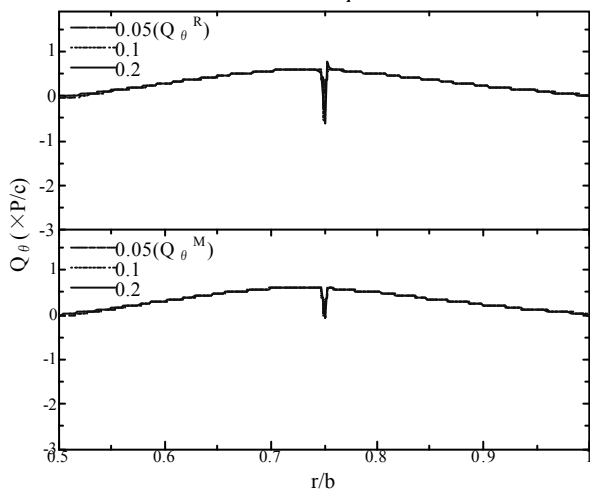


図-6  $q=0$  边上での  $Q_{\theta}$  分布 (S1 条件)

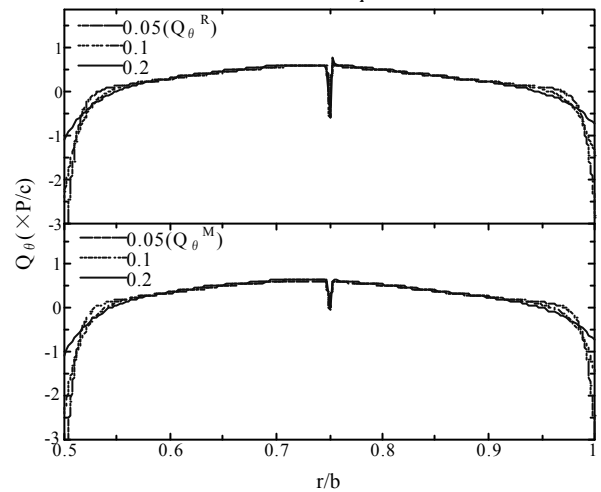


図-7  $q=0$  边上での  $Q_{\theta}$  分布 (S2 条件)

次に、各理論に基づく境界近傍の差異を明らかにするために、円弧辺が単純支持(ハードタイプ)、単純支持(ソフトタイプ)のものに関して、ねじりモーメント、せん断力分布を図-4-図-7に示した。ここでは、Reddy, Mindlin 理論による結果をそれぞれ上下に分けて記載した。尚、Reddy 理論における結果は有効せん断力  $Q_q^*$  を用いた。図-4, 6 に示すように、S1 条件では境界付近でわずかに異なる値を示していたが、各理論による違いはほとんど現れていなかった。一方、S2 条件では、板厚が増加するにしたがって、境界近傍での分布が変化し板厚の影響を大きく受けている事が明らかとなった。 $M_{r\theta}$  に関しては境界付近では Reddy, Mindlin 理論において板厚の変化に伴い、コーナーでの数値が変化し、最大値を与える点が中央に近づいていった。また、 $Q_{\theta}$  に関しては、両理論とも S2 条件では境界付近で応力が集中していることが分かる。これは境界条件の規定による違いであり、薄板理論における  $M_{r\theta}$  に対応するものと考えられる。ここで  $Q_{\theta}$  に関して、 $r/b=0.75$  において値の急激な変化が見られたが、これに関しては今の所原因が不明である。

## 5. 結論

- (1) Reddy 理論による釣り合い式を直角座標系と同様に変位関数を用いて独立な 2 階と 6 階の微分方程式により示した。
- (2) Reddy 理論による結果を薄板理論, Mindlin 理論によるものと比較すると断面力に関しては大きな差は見られなかったが、たわみに関しては板厚比が増加すると、どの境界条件においても大きな値をとることが明らかとなった。
- (3) S2 条件における境界近傍では、薄板理論における境界での規定による違いから応力の集中が見られ、板厚比が大きくなると  $M_{r\theta}, Q_{\theta}$  の分布が変化することがわかった。
- (4) Mindlin 理論, Reddy 理論による結果がほとんど等しかったことから本解析の信頼性が明らかとなった。

## 参考文献

- [1] 松村一也, 高次せん断変形理論に基づく平板の解析法とその力学的特性に関する研究, 大阪市立大学修士論文, 2002