大阪市立大学大学院　都市系専攻
修士論文梗概集　2005 年　3 月

異方性厚板の衝撃応答特性に関する解析的研究

構造工学分野　　近安　規晃

1．はじめに

近年，複合材料の広範な工学分野への適用・応用が盛んになりつつある．その中の複合材料の一つに，1940 年代に開発された GFRP(glass fiber reinforced plastics)に代表される繊維補強複合材料がある．この材料は微視的には繊維と母材からなる非均質体であるが，巨視的には横等方性と見なすことができ，そのため板厚方向を異方軸とする横等方性矩形厚板の衝撃応答解析が行われている[1]. しかしながら，この研究は，厚み方向と直角方向に繊維補強した複合材料からなる構造部材の衝撃特性を明らかにしているとは言えないと考えられる．そこで本研究では，グラファイト系よりなる複合材料を念頭に，三次元弾性論に基づき，面内方向を異方軸とする横等方性矩形板の衝撃応答解析を行った．解析には，固有関数展開法を用いたが，本手法は，対象とする問題の固有関数（振動モード関数）が求まれば，通常の構造物の動的応答解析に用いられているモード法と同様にして解を求めることができ，煩雑なラプラス逆変換を必要としない利点がある．また，固有関数を求める際に必要な波動方程式は Hu の変位関数を拡張して導いた．

数値計算例では，Mindlin 平板の解析結果とも比較を行い，材料異方性が応答に及ぼす影響を調べた．また，実材料である Graphite-epoxy についての解析も行った．

2．横等方性厚板の基礎式

本解析で取り扱う横等方性矩形板の座標系を図 1 に示す．矩形板は，x 軸を異方軸，yz 面は等方面とし，辺長を $a \times b$，板厚を h とし，x=0,a および y=0,b で単純支持されているものである．

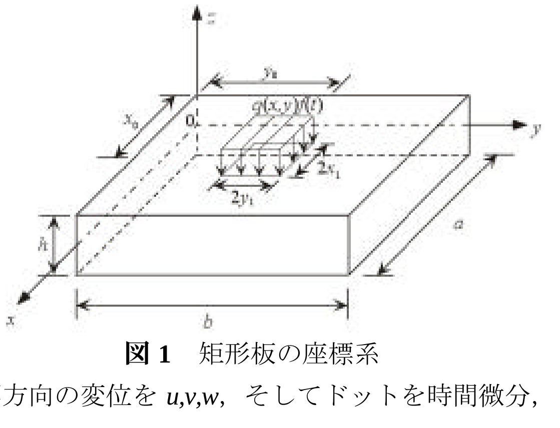


図 1　矩形板の座標系

座標方向の変位を u,v,w，そしてドットを時間微分，ρ を密度とすると，基礎式は以下のようになる．

$$L_u(u,v,w) = r\,\ddot{u},\ L_v(u,v,w) = r\,\ddot{v},\ L_w(u,v,w) = r\,\ddot{w} \quad (1)$$

そして，L_u, L_v, L_w の内容は，

$$\begin{aligned}
L_u(u,v,w) &= C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{55}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{55}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
&\quad + (C_{12}+C_{55})\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (C_{12}+C_{55})\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\
L_v(u,v,w) &= (C_{12}+C_{55})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{55}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
&\quad + C_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (C_{23}+C_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \\
L_w(u,v,w) &= C_{55}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
&\quad + (C_{12}+C_{55})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (C_{23}+C_{44})\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}
\end{aligned} \quad (2)$$

である．材料定数 C_{ij} の工学的表示は以下である．

$$\begin{aligned}
&C_{11} = \frac{1-n}{ER},\ C_{12} = \frac{n'}{E'R},\ C_{22} = \frac{E' - n'^2 E}{(1+n)E'^2 R}, \\
&C_{23} = \frac{n'^2 E + n E'}{(1+n)E'^2 R},\ C_{44} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2},\ C_{55} = G', \\
&R = \frac{1}{E'}\left\{\frac{1}{E}(1-n) - 2\frac{n'^2}{E'}\right\}
\end{aligned} \quad (3)$$

ここで，E, n はそれぞれ等方面でのヤング率，ポアソン比であり，E', n', G' はそれぞれ等方面と異方面に関してのヤング率，ポアソン比，せん断弾性係数である．

3．衝撃応答解析

矩形板は，4 辺単純支持されているものとする．固有関数展開法[1]に従えば，式(1)の解を次のようにおく．

$$u = u^s + u^d,\ v = v^s + v^d,\ w = w^s + w^d \quad (4)$$

ここで，u^s, v^s, w^s は式(1)の慣性項を省いた場合の解であり，次のように表すことができる．

$$\begin{bmatrix} u^s(x,y,z,t) \\ v^s(x,y,z,t) \\ w^s(x,y,z,t) \end{bmatrix} = f(t)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix} U^s_{mn}(z) cos a_m x \, sin b_n y \\ V^s_{mn}(z) sin\, a_m x cos\, b_n y \\ W^s_{mn}(z) sin a_m x \, sin b_n y \end{bmatrix} \quad (5)$$

また，以下の境界条件を満足する．

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x^s = v^s = w^s = 0 \quad (x = 0, a)\\
&\sigma_y^s = u^s = w^s = 0 \quad (y = 0, b)\\
&\sigma_z^s = -q(x,y,t),\ \tau_{zx}^s = \tau_{yz}^s = 0 \quad (z = +h/2)\\
&\sigma_z^s = \tau_{zx}^s = \tau_{yz}^s = 0 \qquad\qquad (z = -h/2)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

なお，外荷重のフーリエ級数展開は，

$$
q(x,y,t) = f(t)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}\ \sin\alpha_m x \sin\beta_n y \tag{7}
$$

である．ここで，

$$
q_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a q(x,y)\sin\alpha_m x\sin\beta_n y\, dxdy \tag{8}
$$

$$
\alpha_m = m\pi/a,\quad \beta_n = n\pi/b \tag{9}
$$

一方，u^d, v^d, w^d は，自由振動解析より求められる固有関数（振動モード関数）$U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}$ と未定の時間関数 $Q_{mnl}(t)$ の積からなる級数で次のように与えることができる．

$$
\begin{bmatrix} u^d(x,y,z,t)\\ v^d(x,y,z,t)\\ w^d(x,y,z,t)\end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(t)\begin{bmatrix} U_{mnl}(z)\cos\alpha_m x\sin\beta_n y\\ V_{mnl}(z)\sin\alpha_m x\cos\beta_n y\\ W_{mnl}(z)\sin\alpha_m x\sin\beta_n y\end{bmatrix} \tag{10}
$$

固有関数は，固有円振動数を ω_{mnl}，$i = \sqrt{-1}$ として，

$$
\left(u^d, v^d, w^d\right)_{mnl} = \left(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}\right)\exp\left(i\omega_{mnl} t\right) \tag{11}
$$

とおき，式(1)に代入したのち時間項を省略した自由振動問題のつり合い式：

$$
\begin{aligned}
L_u\left(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}\right) &= -\rho\ \omega_{mnl}^2 U_{mnl}\\
L_v\left(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}\right) &= -\rho\ \omega_{mnl}^2 V_{mnl}\\
L_w\left(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}\right) &= -\rho\ \omega_{mnl}^2 W_{mnl}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

および境界条件：

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x^d = V_{mnl} = W_{mnl} = 0 \quad (x = 0, a)\\
&\sigma_y^d = U_{mnl} = W_{mnl} = 0 \quad (y = 0, b)\\
&\sigma_z^d = \tau_{zx}^d = \tau_{yz}^d = 0 \qquad (z = \pm h/2)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

を満足する．

また，$\delta_{mp}, \delta_{nq}, \delta_{lr}$ をクロネッカーのデルタ，N_{mnl}^2 をノルムとすると，固有関数には相反定理より求められる次の直交性がある．

$$
\int_V \left(U_{mnl}U_{pqr} + V_{mnl}V_{pqr} + W_{mnl}W_{pqr}\right) dV = \delta_{mp}\delta_{nq}\delta_{lr}N_{mnl}^2 \tag{14}
$$

ここで，式(1)に式(4)を代入し，式変形を行うと，

$$
\begin{aligned}
L_u\left(u^d, v^d, w^d\right) &= \rho\ \ddot{u}^d + \rho\ \ddot{u}^s\\
L_v\left(u^d, v^d, w^d\right) &= \rho\ \ddot{v}^d + \rho\ \ddot{v}^s\\
L_w\left(u^d, v^d, w^d\right) &= \rho\ \ddot{w}^d + \rho\ \ddot{w}^s
\end{aligned}
\tag{15}
$$

を得る．次に式(10)を上式に代入し，さらに式(12)を利用すれば，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left[\ddot{Q}_{mnl} + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}\right] U_{mnl} = -\rho\ \ddot{u}^s\\
&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left[\ddot{Q}_{mnl} + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}\right] V_{mnl} = -\rho\ \ddot{v}^s\\
&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left[\ddot{Q}_{mnl} + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}\right] W_{mnl} = -\rho\ \ddot{w}^s
\end{aligned}
\tag{16}
$$

となる．ここで，$U_{pqr}, V_{pqr}, W_{pqr}$ をそれぞれ上式の第 1~3 式の両辺に乗じ，3 式を加えあわせた後，物体全体にわたり積分し，固有関数の直交性を利用すると次式を得る．

$$
\ddot{Q}_{mnl}(t) + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}(t) = \ddot{f}(t)\cdot Z_{mnl} \tag{17}
$$

ここに，

$$
Z_{mnl} = -\int_V \left(U^s U_{mnl} + V^s V_{mnl} + W^s W_{mnl}\right) dV / N_{mnl}^2 \tag{18}
$$

であり，U^s, V^s, W^s は $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$=1 とした時の静的解を意味する．そして，式(17)の解をラプラス変換を用いて解くと次のようになる．

$$
\begin{aligned}
Q_{mnl}(t) &= \frac{Z_{mnl}}{\omega_{mnl}}\int_0^t \ddot{f}(\tau)\sin\left[\omega_{mnl}(t-\tau)\right]d\tau\\
&\quad + Q_{mnl}(0)\cos\omega_{mnl}t + \dot{Q}_{mnl}(0)\frac{1}{\omega_{mnl}}\sin\omega_{mnl}t
\end{aligned}
\tag{19}
$$

ここに，$Q_{mnl}(0)$，$\dot{Q}_{mnl}(0)$ は初期値であり，衝撃を受ける前の矩形板は静止しているとし，また荷重が時間に関してステップ状に作用する場合，式(19)は以下になる．

$$
Q_{mnl}(t) = Z_{mnl}\cos\omega_{mnl}t \tag{20}
$$

なお，静的解および固有関数の具体式は記さなかったが，これらは Hu の変位関数を利用･拡張することにより求めることができる．

4．数値計算例

数値計算では，板厚比 h/a=0.2 の正方形板(b/a=1)に，載荷幅が $x_1/a = 0.1, y_1/a = 0.1$ の部分等分布荷重 q_0 が時間に関してステップ状に作用する場合を取り扱った．なお，衝撃を受ける前の矩形板は静止しているものとし，時間については以下に示す無次元時間を使用した．

$$
\tau = \frac{c_1 t}{h},\qquad c_1 = \sqrt{\frac{C_{22}}{\rho}} \tag{21}
$$

ここで，c_1 は等方面内を進行する縦波速度である．また，材料定数については，異方性の特性を簡明に検討するためにヤング率比 E'/E のみを変化させ，ポアソン比は $\nu = \nu'$=0.3 で一定として数値計算を行った．

また，Graphite- epoxy についての解析も行っているが，その際ヤング率比 E'/E=1，すなわち等方性体の場合との比較を行っている．数値計算では，この等方性体の材料を鋼と見なし，表 1 に示す材料定数を用いた．そして，Graphite-epoxy の材料定数については，表 2 に示すものを用いている．

表 1　鋼の材料定数

$E=E'$	? = ?′	?
(GPa)	―	(kN/m^3)
210	0.3	76.9

表 2　Graphite-epoxy の材料定数

E'	E	G'	G	?′	?
(GPa)	(GPa)	(GPa)	(GPa)	―	(kN/m^3)
145	9.6	4.1	3.28	0.3	14.0

以上のような条件の下で，衝撃応答解析を行ったが，数値計算例として，図 2 に示すような着目点を選点し，各点での変位 w あるいは応力 σ_x, σ_y の応答曲線を示す．

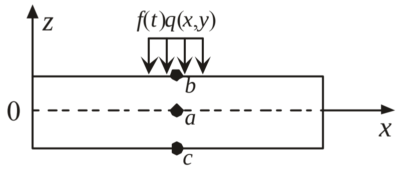


図 2　応答の着目点

1) ヤング率比の変化による応答の比較

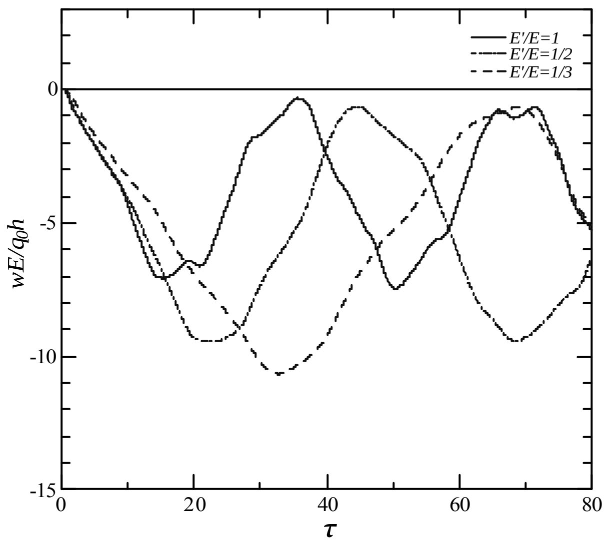
***a*) 変位 *w* の応答（着目点 *a*）**

着目点 a (x/a=0.5,y/b=0.5,z/h=0)における変位 w の長期応答を図 3 に示す．まず，三次元弾性論による厚板の結果と Mindlin 平板の結果を比較した場合，図 3(a),(b)より周期および応答値に関してほぼ一致していることがわかる．また，無次元基本周期 T は，固有値解析によればヤング率比 E'/E=1, 1/2, 1/3 に対して，T=34.36, 46.42, 66.00 となった．これは応答図から読み取れる時刻と一致していることがわかる．

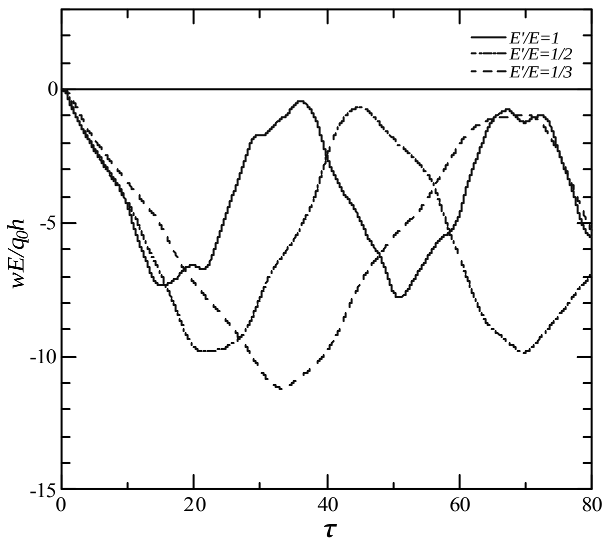
次にヤング率比による影響を見てみると，ヤング率比 E'/E が小さくなれば，xy 平面の剛性が相対的に低下し，それに対応した周期と応答値の違いが図に現れている．つまり，ヤング率比が小さくなるほど，周期は長くなり，最大応答値は大きくなることが確認できる．

***b*) 応力 σ_x, σ_y の応答（着目点 *b,c*）**

着目点 b,c (x/a=0.5,y/b=0.5,z/h=±0.5)における応力 σ_y, σ_x の長期応答をそれぞれ図 4, 図 5 に示す．まず，三次元弾性論による厚板の結果と Mindlin 平板の結果を比較した場合，図 4(a),(b)および図 5(a),(b)より周期に関しては，板上面および板下面ともにほぼ近い値が得られた．一方，応答値に関しては，板下面ではほぼ近い値が得られているが，板上面では多少の違いが見られる．この理由として以下のようなことが考えられる．一般に，載荷荷重が作用した瞬間に作用圧縮荷重 q_0 とつり合う圧縮応力 σ_z が作用する．三次元弾性論においては，この σ_z を考慮しているため載荷荷重直後($t=0$)に応答値を持っているが，



(a)　三次元厚板



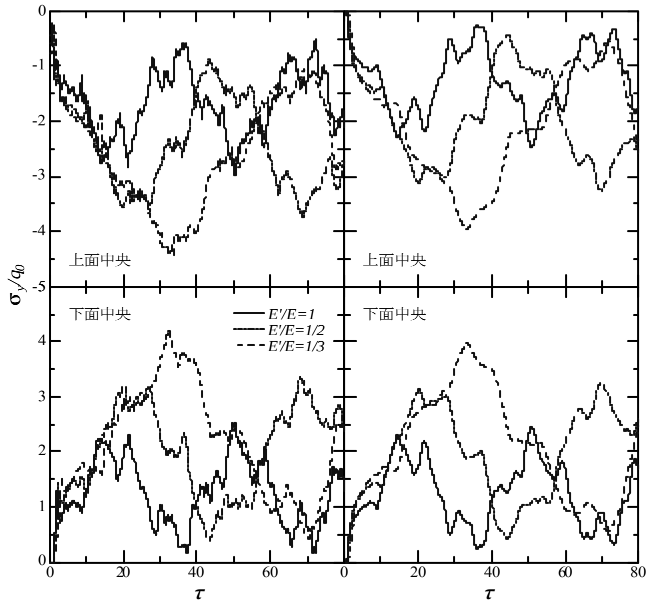
(b)　Mindlin 平板

図 3　着目点 a (x/a=0.5,y/b=0.5,z/h=0)における変位 w

Mindlin 理論においては，この σ_z を考慮していないため荷重載荷直後($t=0$)に応答値を持っていない．この理論の違いにより板上面における応答値に多少の違いが見られるのではないかと考えられる．

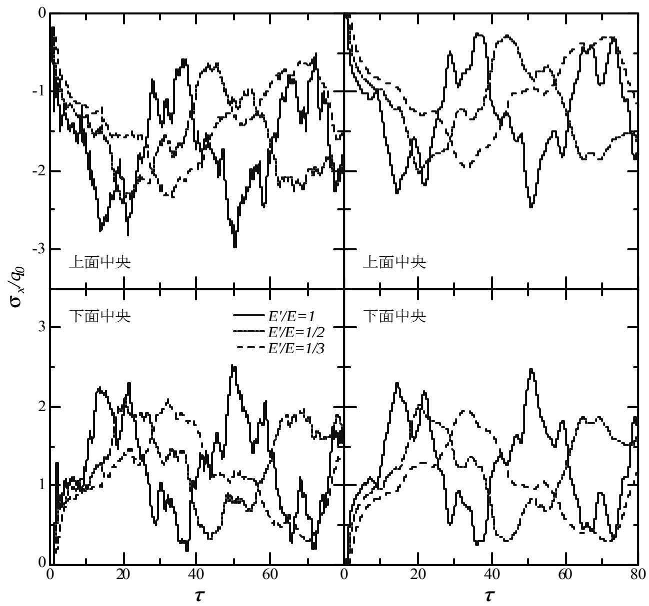
次にヤング率比による影響を見る．σ_y の応答図 4 を見ると，ヤング率比が小さくなるにつれて，最大応答値が大きくなっていることがわかる．一方，σ_x の応答図 5 を見ると，最大応答値に関してはヤング率比による影響はあまり見られない．これは，ヤング率比が 1 より小さい場合，y 方向の剛性が相対的に大きくなることにより，曲げ応力に対応するこの応力 σ_y の応答値も大きくなると考えられる．

また，無次元基本周期 T に関しては，ヤング率比 E'/E=1, 1/2, 1/3 に対して，T=34.36, 46.42, 66.00 であり，これも応答図から読み取れる時刻と一致している．



(*a*)　三次元厚板　　　　(*b*)　Mindlin 平板

図 4　着目点 *b,c* (*x/a*=*y/b*=0.5,*z/h*=± 0.5)における応力 $\boldsymbol{\sigma}_y$



(*a*)　三次元厚板　　　　(*b*)　Mindlin 平板

図 5　着目点 *b,c* (*x/a*=*y/b*=0.5,*z/h*=± 0.5)における応力 $\boldsymbol{\sigma}_x$

2) Graphite-epoxy の応答

着目点 *c* (*x/a*=0.5,*y/b*=0.5,*z/h*=-0.5)における応力 $\boldsymbol{\sigma}_y$,$\boldsymbol{\sigma}_x$ の長期応答をそれぞれ図 6,7 に示す.

まず, 三次元弾性論による厚板の結果と Mindlin 平板の結果を比較した場合，図 6 の $\boldsymbol{\sigma}_y$の応答図では周期および最大応答値に関してほぼ近い値が得られているが．図 7 の $\boldsymbol{\sigma}_x$ の応答図では周期に関してはほぼ近い値が得られているものの，最大応答値に関しては少し違っていることがわかる．次に，Graphite-epoxy と *E'/E*=1 との比較という観点から見ると, 図 6 の $\boldsymbol{\sigma}_y$に関しては Graphite-epoxy の最大応答値が *E'/E*=1 の場合に比べて小さくなっていることがわかる．逆に図 7 の $\boldsymbol{\sigma}_x$に関しては Graphite-epoxy の最大応答値が *E'/E*=1 の場合に比べて大きくなっている．これは，Graphite-epoxy が一方向繊維補強材料であり，*x* 方向の剛性を高めたものであるため, *x* 方向の剛性が相対的に高くなるため，$\boldsymbol{\sigma}_x$の最大応答値が大きくなり，逆に $\boldsymbol{\sigma}_y$の最大応答値が小さくなっていると考えられる.

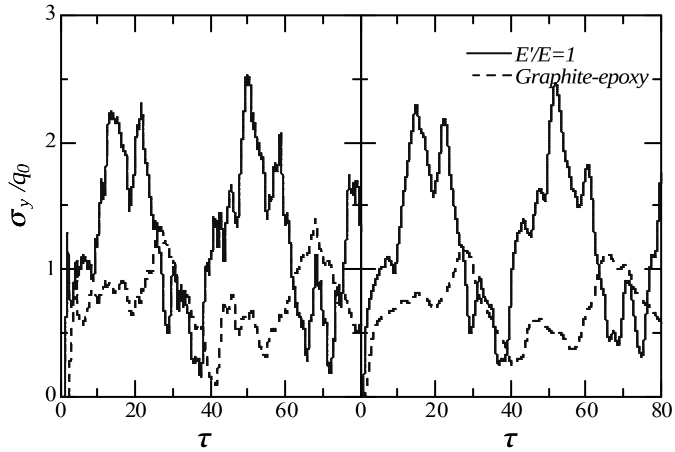


図 6　着目点 *c* (*x/a*=*y/b*=0.5,*z/h*=-0.5)における応力 $\boldsymbol{\sigma}_y$

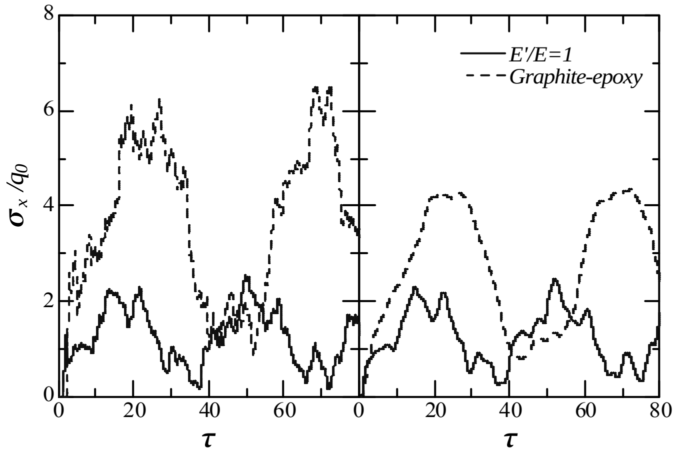


図 7　着目点 *c* (*x/a*=*y/b*=0.5,*z/h*=-0.5)における応力 $\boldsymbol{\sigma}_x$

5．まとめ

(1) 変位 *w* の応答では，ヤング率比が小さくなるほど周期は長くなり，かつ最大応答値は大きくなる.

(2) 曲げ応力の応答では，ヤング率比が小さくなると，$\boldsymbol{\sigma}_y$ の最大応答値は大きくなるが，$\boldsymbol{\sigma}_x$ の最大応答値はあまり変化がない.

(3) Graphite-epoxy のように *x* 軸方向に繊維補強した材料は，最大応答値に関して等方性体と比較した場合，$\boldsymbol{\sigma}_x$が大きくなり，$\boldsymbol{\sigma}_y$は小さくなる.

(4) 今回解析に用いた Graphite-epoxy のヤング率比 *E'/E* は 15 であり，このようにヤング率比が大きいものを解析した場合，剛性の高い方向に対する曲げ応力の応答値に関して，三次元厚板と Mindlin 平板の間に大きな違いが見られた.

参考文献

[1]小林治俊,須方大介: 固有関数展開法による横等方性矩形厚板の衝撃応答解析, 応用力学論文集,土木学会 Vol.3, pp.3-12, 2000.