大阪市立大学大学院　都市系専攻
修士論文梗概集 2004 年 3 月

柱体列による斜め入射波の反射と透過に関する理論的研究

河海工学研究分野　　塩田　純土

1.　緒言

都市部への人口集中や工場数の増加等により，有機物や栄養塩類を多く含んだ家庭排水や工場排水が，大量に海に流れ込むようになった．また埋立等の臨海地域開発によって，背後に大都市を抱える内湾部での自然海浜や浅海域が減少している．その結果，港湾内で閉鎖性水域が形成され水環境が著しく劣化している．このような背景から近年では，従来より行われていた沿岸域での防災・防護に加え，海岸・海洋環境にも留意した港湾の開発計画が成されるようになり，港湾内の水環境を改善する機能を有する海岸構造物が提案あるいは施工されるようになっている．

本研究では，この種の構造物の一つである柱体列を有する海岸構造物を対象としている．柱体列を有する構造物は港内に波を進入させずに流れも損なわない，つまり柱体部では波を反射し，スリット部で流れを透過させるといった特性を持つ．よって，この種の構造物は港内の静穏性を保ちつつ，近年海環境の大きな問題の一つである港内の貧酸素化解消にも効果が期待できる．

これらの構造物の設計を行う際には，波がスリットを通過するときの透過率や反射率，あるいは波による構造物への作用力を知ることが必要である．柱体列と波との干渉問題に関する既往の研究は，構造物に対して波が直角に入射する場合を対象とするものが多いが，実際の波動場において入射波は構造物に対して任意の角度を有しているのが一般的である．本研究では，柱体列に対する Blockage Coefficient の理論を導入した直角入射波についての漸近展開接合法を応用し，柱体列に対して任意の角度を有する入射波が与えられた際の波動場解析を行う．さらに，柱体列の厚みによる影響を考慮した Blockage Coefficient を導き，それによって得られた解と既往の解とを比較し，その妥当性を検討する．

2.　解析理論

(1) 支配方程式と境界条件

一定水深 h の波動場中に水深方向に断面が不変の 3 次元構造物が固定されており，これに平面波が作用する場合を考える．**図-1** に示すように，y 軸上に柱体列を無限に配し，静水面上から鉛直上向きに z 軸を，それらと直角に x 軸をとる．また，柱体の開口幅を $2a$，隣接柱体間隔を D とし，入射波と x 軸とがなす角度を θ とする．流体は非回転・非圧縮性であり，取り扱う波は微小振幅波とする．また，粘性減衰効果は一切考慮しない．

柱体列まわりの速度ポテンシャル Φ は，入射波速度ポテンシャル Φ_i と柱体列による回折散乱波ポテンシャル Φ_s との和で与えられる．

$$\Phi(x,y,z,t) = \Phi_i(x,y,z,t) + \Phi_s(x,y,z,t) \tag{1}$$

水底での境界条件を考慮し時間項を $e^{-i\omega t}$ と表わすとき，速度ポテンシャル Φ は次式のように表わされる．

$$\Phi(x,y,z,t) = \phi(x,y)\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}e^{-i\omega t} \tag{2}$$

ここで i は $\sqrt{-1}$, g は重力加速度, ω は角周波数 ($\omega = 2\pi/T_w$, T_w：周期)，k は波数 ($k = 2\pi/L$，L：波長) をそれぞれ表わしている．

支配方程式として 3 次元 *Laprace* の方程式を用い，式 (2) を代入して整理すると次式のようになる．

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + k^2\phi = 0 \tag{3}$$

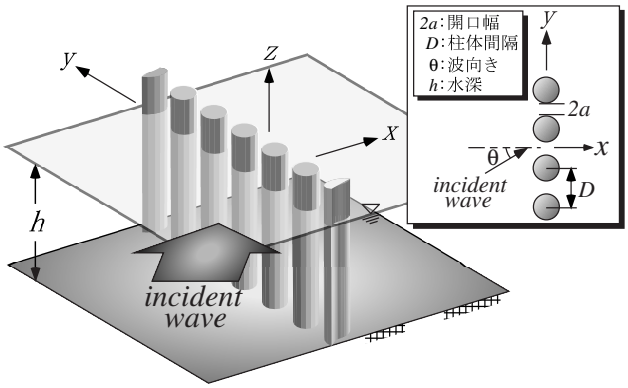
これは *Helmholtz* の方程式であり，平面波と柱体列との干渉問題は，以下に示す各種境界条件を満足する *Helmholtz* の方程式の解 $\phi(x,y)$ を求める 2 次元問題に帰着される．以下では，この解 $\phi(x,y)$ を改めて速度ポテンシャルと呼ぶこととする．以下に境界条件を示す．

$$w = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0 \tag{4}$$

$$w = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\partial\eta}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\phi_i}{\partial n} + \frac{\partial\phi_s}{\partial n} = 0 \quad : \text{on } S_B \tag{6}$$

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial\phi_s}{\partial r} - ik\phi_s\right) = 0 \tag{7}$$



図－1　構造諸元と座標系

ここで n は境界外向き法線を，r は構造物内に原点を置く同径座標を表わし，式 (4) は水底での，式 (5) は水表面での，式 (6) は構造物表面 (S_B) での境界条件をそれぞれ表わす．式 (7) は *Sommerfeld* の放射条件である．

(2) 漸近展開接合法（MAE 法）

漸近展開接合法は，ある物体付近の薄い境界層内に相当する領域と，境界層外に相当する領域の 2 つに分け，境界層内に相当する領域の解（内的解）と，境界層外に相当する領域の解（外的解）をそれぞれ導出し，領域同士の接点に極限操作された解を等値することで全領域で満足するような近似解を求めるものである．

a) 外的解（*Far Field Solutions*）

複素透過率を T，複素反射率 R とすると，*Far Field* における速度ポテンシャル ϕ は次式のようになる．

$$\phi = Te^{ik(x\cos\theta + y\sin\theta)} \qquad x > 0 \qquad (8)$$

$$\phi = e^{ik(x\cos\theta + y\sin\theta)} + Re^{-ik(x\cos\theta - y\sin\theta)} \qquad x < 0 \qquad (9)$$

b) 内的解（*Near Field Solutions*）

内部領域における流体は，柱体列より少し離れた地点では一様流を回復していると仮定し，*Near Field* での速度ポテンシャル ϕ を速度振幅をもつ一様流に対する速度ポテンシャルとして次式のように定義する．

$$\phi = \psi(x) \cdot e^{iky\sin\theta} \qquad (10)$$

$$\psi(x) = U(x \pm C_R) + F \qquad x \gtrless 0 \qquad (11)$$

U は柱体列通過前後の一様流の流速振幅，C_R は Blockage Coefficient[1)]，F は複素定数をそれぞれ表わている．

ここで，Blockage Coefficient は，長さの単位を持ち柱体列の慣性抵抗による流れの阻害の程度を表わす性質を有す理論定数である．この係数は，柱体列が存在しない場合は 0，閉塞されている場合は ∞ の値をとり，柱体列構造諸元によって一意的に決定される．一般的な断面形状の柱体列についての解が既に得られており，例えば円柱列の場合，近似的に次式のように表わされる．

$$\frac{C_R}{D} = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{2a}{D}\right)^2 \frac{1}{1-v} \qquad v = \frac{\pi^2}{12}\left(1 - \frac{2a}{D}\right)^2 \qquad (12)$$

c) 外的解と内的解の接合

各領域における速度ポテンシャル ϕ を，柱体の厚みが無いと仮定して柱体列上（$x = 0$ 上）で接合させる．接合する際に，各領域間での速度ポテンシャル ϕ および，柱体列に対して直角方向の流速 $\partial\phi/\partial x$ に関する連続性を満足する必要がある．MAE 法では，これらの条件から導かれる連立方程式より各未知量を決定している．接合の結果得られる未知量 F，U，T，R は以下のとおりである．

$$F = 1 \qquad U = \frac{ik\cos\theta}{1 - ikC_R\cos\theta} \qquad (13)$$

$$T = \frac{1}{1 - ikC_R\cos\theta} \qquad R = \frac{-ikC_R\cos\theta}{1 - ikC_R\cos\theta} \qquad (14)$$

d) 既往の解との比較

決定された未知量のうち，構造物設計の際に特に必要であると思われる透過率 K_T・反射率 K_R について既往の解と比較し，その妥当性を検討する．ここで，透過率 K_T・反射率 K_R は，複素透過率 T・複素反射率 R の絶対値をとることで次式のように表わされる．

$$K_T = \sqrt{\frac{1}{1 + k^2 C_R^2 \cos^2\theta}} \quad K_R = \sqrt{\frac{k^2 C_R^2 \cos^2\theta}{1 + k^2 C_R^2 \cos^2\theta}} \qquad (15)$$

式 (15) より，MAE 法による解はエネルギーの保存則 $K_T^2 + K_R^2 = 1$ を満足していることがわかる．

MAE 法による透過率 K_T・反射率 K_R と円柱列における既往の理論解である Twersky による透過率 K_T・反射率 K_R との比較結果を，**図-2** に示す．MAE 法による解は Twersky による解を十分に近似し得ておらず，両者の解には 2 つの相違点が見られる．1 つは入射波角度 θ が小さな範囲での値の相違である．この範囲では両者の解の傾向は同じであるが，その値に差が生じている．もう 1 つは入射波角度 θ が大きな範囲での値の相違であり，この範囲では両者の解の傾向にも大きな違いが生じている．すなわち，Twersky による解は $\theta = 90°$ で $K_R = 1$ となり，$\theta < 90°$ において $K_R = 0$ となる角度（Brewster's angle）が存在するのに対して，MAE 法による解には Brewster's angle が存在しない．

この 2 つの相違点より MAE 法による解には，何らかの要素が欠如していると考えられる．その要素の一つとして，柱体列の厚みによる影響が考えられる．そこで，厚みによる影響量を考慮した解析手法を以下に提示する．

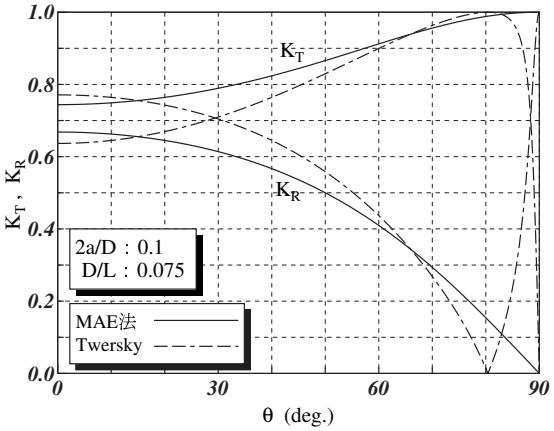


図 – 2　円柱列における透過率 K_T・反射率 K_R

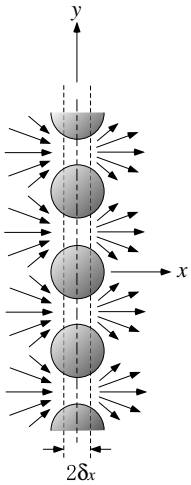
3.　既往の研究における厚みによる影響の評価

(1) 厚みの影響量 δ_x を導入した理論

MAE 法の接合において，外的解と内的解の接合位置は柱体列の中心線上，すなわち $x = 0$（y 軸上）としていた．このような考え方が成り立つには，柱体列を構成する柱体の断面（厚み）が波長 L に比べて十分に薄く，なおかつ隣り合う柱体の中心間隔 D に比べても十分に薄いという条件が必要である．通常の海岸構造物を対象とした場合，前者の条件は容易に満足されるが，後者の条件は容易に満足される条件とはいいがたい．

村本[2]は，柱体列に厚みがある場合，厚みの影響により外的解と内的解の接合位置は**図-3** のように y 軸上よりずれた点にくると考え，そのずれの量を厚みによる影響量 δ_x とし，直角入射波における δ_x を実験との対比により定式化している．例えば，円柱列の厚みの影響量 δ_x を次式で表わした．

$$\frac{\delta_x}{D} = \frac{\pi}{8}\left(1 - \frac{2a}{D}\right)^2 \qquad (16)$$



図－3　δ_x

この厚みによる影響量 δ_x を考慮し MAE 法の理論展開を行う．まず，外的解を以下のように置き換える．

$$\phi = Te^{ik(\delta_x \cos\theta + y\sin\theta)} \qquad x > 0 \qquad (17)$$

$$\phi = e^{ik(-\delta_x \cos\theta + y\sin\theta)} + Re^{-ik(-\delta_x \cos\theta - y\sin\theta)} \qquad x < 0 \qquad (18)$$

また，内的解を次式のように置き換える．

$$\phi = \{U(\pm\delta_x \pm C_R) + F\} \cdot e^{iky\sin\theta} \qquad x \gtrless 0 \qquad (19)$$

置き換えた各領域での解を MAE 法により接合させると，未知量が決定される．厚みによる影響量 δ_x を考慮した複素透過率 T・複素反射率 R は次式のように表わされる．

$$T = \frac{1}{1 - ik(C_R + \delta_x)\cos\theta} \qquad R = \frac{-ik(C_R + \delta_x)\cos\theta}{1 - ik(C_R + \delta_x)\cos\theta} \qquad (20)$$

(2) 摂動法を利用した理論

厚みの影響量 δ_x は，実験値との比較により得られた量である．この厚みによる影響量を漸近展開接合の過程より定量的に求める手法として，摂動法を利用した MAE 法[3]がある．この手法は MAE 法における外的解と内的解を柱体間隔 D で無次元化し，未知量を $\epsilon\ (= kD)$ の級数和の形で定義した後に *Taylor* 展開し，両者の係数を比較することで恒等式を得て未知量を決定する手法である．この手法によると，ϵ の級数和の形で未知量が定義されることから，未知量に対する ϵ の高次の補正項を得ることができる．

摂動法を利用した MAE 法の理論展開を以下に示す．まず，$\bar{x} = x/D$，$\bar{y} = y/D$，$\epsilon = kD$ とし，柱体間隔 D による外的解の無次元化を行うと次式のようになる．

$$\phi = Te^{i\epsilon(\bar{x}\cos\theta + \bar{y}\sin\theta)} \qquad \bar{x} > 0 \qquad (21)$$

$$\phi = e^{i\epsilon(\bar{x}\cos\theta + \bar{y}\sin\theta)} + Re^{-i\epsilon(\bar{x}\cos\theta - \bar{y}\sin\theta)} \qquad \bar{x} < 0 \qquad (22)$$

ここで，未知量である複素透過率 T，複素反射率 R を ϵ の級数和の形で次式のように定義する．

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m T_m \qquad R = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m R_m \qquad (23)$$

外的解と同様に，式 (11) で表わされた内的解を柱体間隔 D で無次元化し，$\bar{x}$，$\bar{y}$，ϵ を用いて次式のように表わす．

$$\phi = \left\{ \bar{U}\left(\bar{x} \pm C_R'/\epsilon\right) + F \right\} e^{i\epsilon\bar{y}\sin\theta} \qquad \bar{x} \gtrless 0 \qquad (24)$$

ここで，$\bar{U} = UD$，$C_R' = kC_R$ である．また，未知量である $\bar{U}$，F を ϵ の級数和の形で次式のように定義する．

$$\bar{U} = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m \bar{U}_m \qquad F = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m F_m \qquad (25)$$

式 (25) を式 (24) に代入し整理すると，内的解を Taylor 展開したものは次式で表わされる．

$$\phi = \left\{ \pm\frac{\bar{U}_0 C_R'}{\epsilon} + \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m \psi_m \right\} e^{i\epsilon\bar{y}\sin\theta} \qquad \bar{x} \gtrless 0 \qquad (26)$$

$$\psi_m = \bar{U}_m \bar{x} \pm \bar{U}_{m+1} C_R' + F_m \qquad \bar{x} \gtrless 0 \qquad (27)$$

式 (23) を式 (21)，(22) にそれぞれ代入し，複素透過率 T，複素反射率 R，$\bar{x}$ に関する項を *Taylor* 展開した外的解と式 (26) で表わされる *Taylor* 展開した内的解の $\bar{x}$，ϵ に関する項の係数を比較することにより，未知量を決定する．

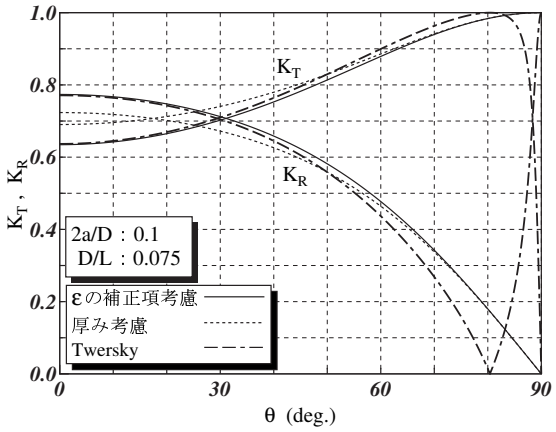
その結果得られる 2 次の補正項まで考慮した複素透過率 T・複素反射率 R は次式のように表わされる．

$$T = \frac{1}{1 - iC_R'\cos\theta} + \epsilon iM\cos\theta - \epsilon^2 M^2 \cos^2\theta \qquad (28)$$

$$R = \frac{-iC_R'\cos\theta}{1 - iC_R'\cos\theta} + \epsilon iM\cos\theta - \epsilon^2 M^2 \cos^2\theta \qquad (29)$$

(3) 解析結果

厚みの影響量 δ_x を考慮した解，ϵ の補正項を考慮した解と Twersky の理論解との比較結果を**図-4** に示す．**図-4** より，入射波角度 θ が小さな範囲での値の相違は，両者共に解消されているが，ϵ の補正項を考慮した解のほうが厚みの影響量 δ_x を考慮した解よりもより精度良く Twersky の理論解を近似していることがわかる．しかしながら，入射波角度 θ が大きな範囲での相違点は解消されておらず，さらなる工夫が必要である．そこで，厚みによる影響を含んだ Blockage Coefficient を導出し，それを用いた解析解を導く．



図－4　円柱列における透過率 K_T・反射率 K_R

4.　厚みの影響を含む Blockage Coef.

(1) 厚みの影響 δ を考慮した Blockage Coef. の導出

図-5 に示すように，柱体近傍において入射波の進行方向に単位流速 U_0 の一様流が存在するポテンシャル場を仮定する．この場合，x 軸方向の流速 U_x は $U_0\cos\theta$，y 軸方向

の流速 U_y は $U_0 \sin\theta$ となる．**図-5** 中の δ は厚みによる影響量である．以下に厚みの影響を含む Blockage Coefficient の導出過程を示す．

柱体列より任意の距離 x だけ離れた点での速度ポテンシャル ϕ は，U_x，距離 x，直角入射時における Blockage Coefficient C_0 を用いて次式のように表わすことができる．

$$\phi = U_x(x \pm C_0) + U_y y + F \qquad x \gtrless 0 \qquad (30)$$

ここで，入射波進行方向に原点を対称とする 2 点間のポテンシャル差 $\Delta\phi_{12}$ について考える．$x > 0$ の領域における点 P_1（δ, δ_y）と $x < 0$ の領域における点 P_2（$-\delta, -\delta_y$）との速度ポテンシャル差 $\Delta\phi_{12}$ は次式のように表わされる．

$$\Delta\phi_{12} = 2U_x(\delta + C_0) + 2U_y\delta_y \qquad (31)$$

ここで入射波進行方向に x' 軸をとると，柱体列より x' 軸上に任意の距離 x' だけ離れた点での速度ポテンシャル ϕ は，x' 軸方向の流速 U_0，距離 x'，厚みの影響及び入射波角度 θ による影響を含む Blockage Coefficient C_θ を用いて次式のように表わすことができる．

$$\phi = U_0(x' \pm C_\theta) + U_y y + F \qquad x' \gtrless 0 \qquad (32)$$

式 (32) より $\Delta\phi_{12}$ は，次式のように表わされる．

$$\Delta\phi_{12} = 2U_0(\delta' + C_\theta) + 2U_y\delta_y \qquad (33)$$

式 (31) と (33) は等しくなる．$\delta' = \delta/\cos\theta$ と関係式より，C_θ を求めることができ，$C_\theta = C_R\cos\theta$ より C_R を求めることができる．

$$U_0 C_\theta = U_0\cos\theta\cdot\delta + U_0\cos\theta\cdot C_0 - U_0\frac{\delta}{\cos\theta}$$
$$C_\theta = \cos\theta\left(C_0 - \delta\tan^2\theta\right)$$
$$\therefore C_R = C_0 - \delta\tan^2\theta \qquad (34)$$

(2) 解析結果

式 (34) に示される，厚みによる影響を考慮した Blockage Coefficient を式 (28)，(29) に示される ϵ の補正項を考慮した解に用いた結果を以下に示す．その際，式 (34) 中の厚みによる影響量 δ を，**i).** 式 (16) で表わされる厚みの影響量 δ_x としたもの，**ii).** $(2a/D)\cdot\delta_x$ としたもの，**iii).** $(2a/D+0.1)\cdot\delta_x$ としたもの，計 3 通りについての解析を行い，Twersky の理論解との比較を行なった．

図-6 に厚みによる影響を考慮した Blockage Coefficient を用いた解析解と Twersky の理論解との比較結果を示す．

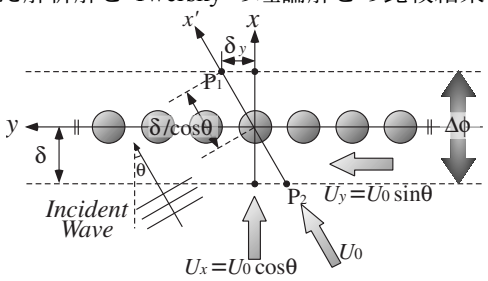


図 – 5　Blockage Coef. の導出過程についての概念図

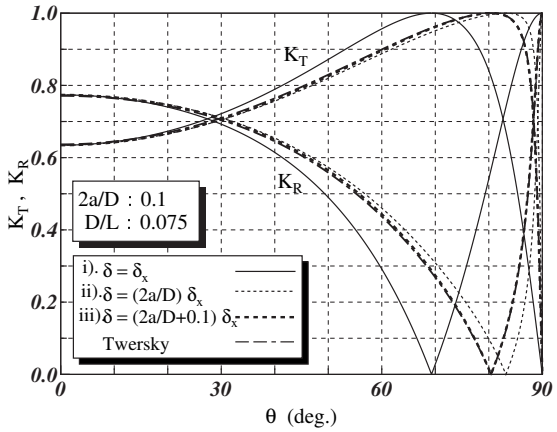


図 – 6　δ の違いによる透過率 K_T・反射率 K_R の比較

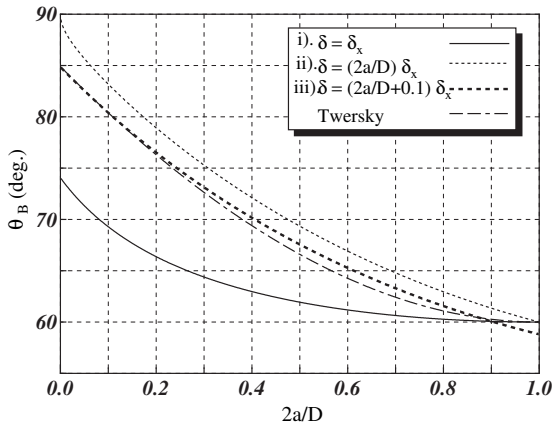


図 – 7　Brewster's angle の比較

図-6 より，δ を $(2a/D+0.1)\cdot\delta_x$ とした場合の解があらゆる入射波角度 θ で Twersky の解を精度良く近似できていることがわかる．また，δ を $(2a/D)\cdot\delta_x$ とした場合の解は，やや近似精度は劣るものの，Twersky の解をある程度近似できていると言える．近似精度を評価する指標として，反射率 K_R が 0 となる入射角度 θ_B（Brewster's angle）と開口率 $2a/D$ との関係を**図-7** に示す．**図-7** より，δ を $(2a/D+0.1)\cdot\delta_x$ とした場合の解は，あらゆる開口率 $2a/D$ において Twersky の解とほぼ同じ Brewster's angle になっていることがわかる．

5.　結言

本論文で得られた主要な結論を以下に示す．

厚みの影響を含む Blockage Coefficient を導出し，ϵ の高次の補正項を考慮した解に導入することで，Twersky の理論解を精度良く近似し得る解を導いた．その際の，厚みによる影響量 δ は，従来の厚みの影響量 δ_x に $2a/D+0.1$ を乗じたものであることを導いた．

参考文献

1) 角野昇八：鉛直のスリットを有する海岸・海洋構造物の周辺波動場に関する研究，1987
2) 村本哲二：柱体列による波のエネルギー逸散に関する研究，大阪市立大学大学院修士論文，1987.
3) Martin, P. A., and Darlymple, R. A.：Scattering of long waves by cylindrical obstacles and gratings using matched asymptotic expansions，J. Fluid Mech.，pp.465-490，1988.